La 'grande bellezza' dei numeri figurativi

Partendo da un aneddoto giovanile del "Principe dei Matematici" Gauss, proponiamo un sorprendente viaggio nel mondo dei "numeri figurativi", le cui insolite proprietà consentono di trovare eleganti soluzioni ad alcuni problemi di calcolo numerico e combinatorio, passando per la probabilità di vincita nei giochi d'azzardo e per i "numeri perfetti", fino ad arrivare al controverso concetto di infinito e alla diversa cardinalità degli insiemi infiniti.
La trattazione è divulgativa ma rigorosa, introduce i vari argomenti in modo elementare e non richiede al lettore conoscenze approfondite di matematica. Sullo sfondo delle applicazioni pratiche, risalta la bellezza estetica e l'eleganza delle proprietà dei numeri figurativi

DOI 10.12910/EAI2014-105

P. Di Lazzaro, D. Murra

"Tutto è numero. Il numero è in tutto. Il numero è nell'individuo. L'ebbrezza è un numero"
Charles Baudelaire, 1883

Se provate a domandare a studiosi di matematica o a semplici appassionati quale sia il più grande matematico della storia moderna, la risposta più frequente sarà "Carl Friedrich Gauss". In effetti, Gauss (1777–1855) è stato autore di dimostrazioni di teoremi fondamentali e i suoi studi hanno dato straordinari impulsi all'evoluzione di diversi campi nelle scienze matematiche e fisiche [1].

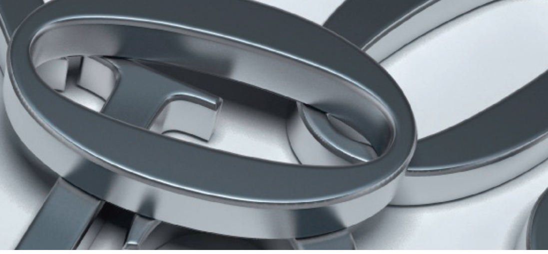
Contact person: Paolo Di Lazzaro
paolo.dilazzaro@enea.it

Sin dalla tenera età, Gauss ha dimostrato un talento precoce. In particolare, un aneddoto narra che nel 1786 un insegnante di matematica della scuola di Braunschweig, tale Büttner, forse allo scopo di tenere impegnati e silenti gli studenti di una scolaresca, assegnò come compito in classe il calcolo della somma dei primi 100 numeri interi. Calcolare le 99 somme richiedeva un tempo notevole, con un'elevata probabilità di incorrere in errore per stanchezza, a dispetto della facilità delle singole operazioni. Sfortunatamente per il professore, uno degli scolari era Gauss, il quale impiegò pochi minuti per calcolare la somma finale esatta, pari a 5050, tra lo stupore dei compagni e dello stesso insegnante [2].

Come ha fatto Gauss a trovare la somma totale? Si trattava forse di 99 addizioni calcolate ad una velocità straordinaria? In realtà Gauss fece solo poche somme a mente, e girò intorno al problema trovando una soluzione brillante e rapida, di grande bellezza ed eleganza. Scrivendo i numeri da 1 a 50 su una riga da sinistra a destra, e poi i numeri da 51 a 100 in una seconda riga da destra a sinistra, otteniamo:

1	2	3	4	5	……	46	47	48	49	50
100	99	98	97	96	…..	55	54	53	52	51

Gauss osservò che la somma di ciascuna coppia di numeri in colonna dà sempre lo stesso risultato, pari a 101. Si tratta di 50 somme, ciascuna delle quali è pari a 101, quindi la somma totale dei primi cento numeri è data da 50 x 101 = 5050.



Nello schema precedente, dato N = 100, abbiamo moltiplicato N+1= 101 per la metà di N: possiamo quindi ottenere la formula generale che fornisce la somma S dei primi N numeri, per N qualunque, che per ovvi motivi è detta "Formula di Gauss":

$$S = \frac{N \times (N+1)}{2} \tag{1}$$

Semplice ed elegante, non trovate? Sembra tutto facile ma, come recita un aforisma di Szent-Gyorgy, *"Lo scoprire consiste nel vedere ciò che tutti hanno visto, e nel pensare ciò che nessuno ha pensato."*

Bisogna precisare che Gauss non fu il primo a scoprire la formula (1) che porta il suo nome, essendo questa già nota ai tempi della Scuola Pitagorica [3]. Gauss ha il merito di avere dedotto questa formula senza conoscerla, mostrando uno straordinario talento che lo avrebbe consacrato in seguito tra i più grandi matematici di ogni tempo.

Intorno al quinto secolo a.C. i Pitagorici [3] scoprirono che la somma dei primi N numeri viene data da una particolare classe di *numeri figurativi o poligonali,* i cosiddetti *"numeri triangolari"*. Di cosa si tratta? I pitagorici formavano le figure geometriche usando dei sassolini. Nel caso di una successione di triangoli, aggiungendo una riga di sassolini al triangolo precedente si ottiene la Figura 1.

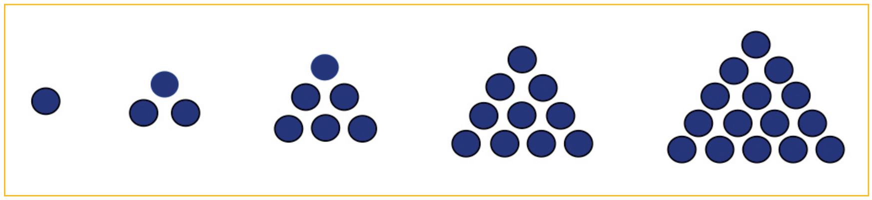


FIGURA 1 Rappresentazione figurativa dei primi cinque numeri triangolari. Ad eccezione del primo numero, 1, si tratta di poligoni di tre lati (triangoli) da cui il nome

La prima forma nella Figura 1 è una sola pallina corrispondente al numero 1.

La seconda forma è un triangolo ottenuto aggiungendo due palline in basso al pallino precedente: in tutto abbiamo 1+2 = 3 palline.

La terza è un triangolo ottenuto aggiungendo 3 palline in basso al triangolo precedente: in tutto abbiamo 3+3 = 6 palline.

La quarta è un triangolo ottenuto aggiungendo 4 palline in basso al triangolo precedente: 6+4 = 10.

La quinta è un triangolo ottenuto aggiungendo 5 palline in basso al triangolo precedente: 10+5 = 15.

A questo punto possiamo intuire come funziona la serie dei numeri triangolari: bisogna sommare al numero precedente il numero corrispondente all'ordine del numero. Ad esempio, se vogliamo aggiungere nella Figura 1 il sesto triangolo, esso sarà fatto di 15+6 = 21 palline, il settimo di 21+7 = 28 palline, e così via.

Nella Tabella 1 riportiamo la serie dei primi quindici numeri triangolari.

Dalla tabella notiamo che si tratta di una serie formata da due numeri dispari alternati a due numeri pari. Proprio per come è costruita la serie, l'N-esimo numero triangolare è uguale alla somma dei primi N numeri. Ad esempio, dalla Tabella 1 leggiamo che il decimo numero triangolare è 55, che è uguale alla somma dei primi 10 numeri: infatti, 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55. Ovviamente, la formula (1) con N=10 fornisce lo stesso risultato.

Rammentando l'aneddoto giovanile di Gauss, non c'è da stupirsi se dieci anni dopo, nel 1796, il diciannovenne Gauss scoprì una sorprendente proprietà dei numeri triangolari: *"tutti i numeri naturali positivi sono sempre rappresentabili come somma di non più di tre numeri triangolari".*

Andiamo a vedere in dettaglio questa insolita proprietà. Prendiamo un numero qualunque, ad esempio 199. Abbiamo che 199 = 1+78+120,

Ordine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Numero Triangolare	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

TABELLA 1 I primi quindici numeri triangolari

la somma di tre numeri triangolari, vedi la Tabella 1. Proviamo con un altro numero a caso, il 73: 28+45 = 73, dove sia 28 sia 45 sono numeri triangolari. Oppure con 14: 10+3+1 = 14. Provate anche voi, potete scegliere qualunque numero intero, pari o dispari, comunque grande o piccolo, purché sia maggiore di 1: il numero scelto si può sempre ottenere dalla somma di due o di tre numeri triangolari, eventualmente ripetuti, come nel caso 20 = 10+10. Si tratta di una proprietà straordinaria, a pensarci bene.

Si può dimostrare per quale motivo un numero qualunque maggiore di uno è sempre esprimibile tramite somma di due o di tre numeri triangolari? Gauss non rese subito pubblica questa scoperta, ma la tenne per sé, scritta in un appunto [4]. Gauss era un perfezionista, e non pubblicava le sue scoperte a meno che non fossero accompagnate da dimostrazioni rigorose. Il suo motto era *Pauca sed matura* (poche cose ma ben sviluppate). Solo qualche anno dopo Gauss pubblicò una dimostrazione indiretta nell'ambito di uno studio sulle forme quadratiche (vedi la nota nella referenza [4] per una sintesi della dimostrazione).

Diversi anni più tardi, nel 1813, il matematico francese Augustin Cauchy pubblicò la soluzione per il caso generale, conosciuto come il *Teorema di Fermat sui numeri poligonali,* per il quale *"qualunque numero intero può essere scritto come somma di al più n numeri poligonali di n lati"* [5]. Il nostro caso rientra in questo teorema perché i numeri triangolari sono numeri poligonali aventi n=3 lati (vedi la Figura 1) e quindi, d'accordo con il teorema di Fermat, qualsiasi numero intero può essere scritto come somma di "al più" n=3 numeri triangolari.

Ma le sorprese non si fermano qui. Proviamo a sommare due numeri triangolari vicini, in riferimento alla serie dei primi numeri triangolari in Tabella 1: 1+3 = 4;   6+3 = 9; 6+10 =16;   10+15 = 25;   15+21 = 36;   21+28 = … e così via.

Osserviamo che la somma di due numeri triangolari successivi è *sempre* il quadrato del numero di ordine del numero triangolare più grande! Ad esempio, la somma del primo e del secondo numero triangolare è pari a 2^2; la somma del secondo e del terzo è pari a 3^2; la somma del terzo e del quarto è 4^2, la somma del quarto e del quinto è 5^2, e così via. Sorprendente, ed elegante.

La dimostrazione di questa proprietà si può ottenere usando di nuovo la rappresentazione figurativa-poligonale della Scuola Pitagorica [3]. Se nella Figura 1 sommiamo i pallini dei triangoli vicini, otteniamo la Figura 2. La Figura 2 mostra che la somma di due numeri triangolari vicini forma sempre un quadrato di lato pari al numero di ordine del numero triangolare più grande. Quindi si tratta della successione di numeri quadrati di lato 2, 3, 4, 5, 6… rispettivamente pari a 4, 9, 16, 25, 36… palline.

In alternativa, questa proprietà si può dimostrare anche partendo dalla formula di Gauss (equazione 1) e addizionando due valori consecutivi, ovvero la somma dei primi N numeri e la somma dei primi N+1 numeri. Il risultato, come abbiamo già visto nella Figura 2, è pari a $(N+1)^2$, ma lasciamo al lettore la soddisfazione di eseguire i semplici passaggi intermedi della dimostrazione.

I numeri triangolari ci vengono in aiuto come soluzione di un classico problema di calcolo combinatorio, il cosiddetto "problema delle strette di mano". In un gruppo di persone, se ciascuno stringe la mano una sola volta a tutti gli altri, quante strette di mano ci saranno in tutto? Partiamo dal caso più semplice. Se ci sono due persone, diciamo che si chiamano Andrea e Bianca, ovviamente ci sarà una sola stretta

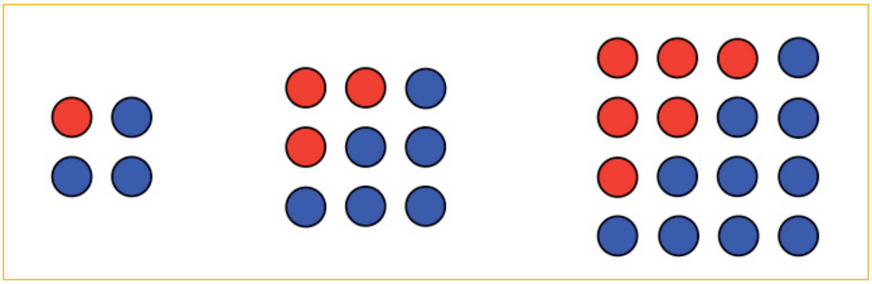


FIGURA 2 Rappresentazione figurativa della somma dei primi numeri triangolari adiacenti della Figura 1. Gli addendi più grandi di ciascuna somma sono distinti con il colore blu. Otteniamo, in totale, la rappresentazione figurativa dei primi tre "numeri quadrati", ovvero numeri figurativi-poligonali di quattro lati, rispettivamente uguali a 2^2= 4; 3^2 = 9; 4^2 = 16

di mano, Andrea con Bianca, e per brevità scriviamo A-B.
Se si aggiunge Carla, avremo A-B, A-C, B-C, quindi 3 strette di mano. Se arriva anche Damiano, avremo A-B, A-C, B-C, A-D, B-D, C-D, quindi 6 strette di mano. All'arrivo della quinta persona, Ennio, avremo 10 strette di mano, precisamente A-B, A-C, B-C, A-D, B-D, C-D, A-E, B-E, C-E, D-E.
Se continuano ad arrivare nuove persone, scopriamo che il numero di strette di mano segue la serie dei numeri triangolari: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, e così via, ricordate la Tabella 1?
In generale, se il gruppo è formato da n persone e ciascuna persona stringe le mani a tutti meno che a se stesso, ci sono n-1 strette di mano per n persone: n×(n-1). Tuttavia, in questo modo viene conteggiata due volte la stretta di mano tra le stesse persone, ad esempio viene contata sia A-B sia B-A, e per correggere questo doppio conteggio bisogna dividere il termine precedente per 2. Quindi, il numero *SM* di strette di mano di un gruppo di n persone è dato da

$$SM = \frac{n\times(n-1)}{2}. \qquad (2)$$

L'equazione (2) permette di conoscere il numero di strette di mano tra un qualsiasi numero n di persone senza dover scrivere tutte le combinazioni, e abbiamo visto che *SM* è sempre un numero triangolare.
Curiosamente, in questo caso la soluzione ad un problema crea un altro problema. Infatti, come è possibile che le equazioni (1) e (2), ovviamente diverse tra loro, siano entrambe generatrici della stessa serie dei numeri triangolari?
Il motivo va ricercato nelle condizioni a contorno del problema. Per avere strette di mano bisogna essere almeno in 2. Infatti, dall'equazione (2) quando n=1 abbiamo *SM*=0 e quando n=2 abbiamo *SM*=1. Viceversa, nell'equazione (1) quando N=1 abbiamo *S*=1. In altre parole, per avere n strette di mano abbiamo bisogno di N+1 persone. Quindi, se sostituiamo n=N+1 nell'equazione (2) otteniamo la stessa equazione (1). Provare per credere…
A questo punto ci appare assai meno strano che le equazioni (1) e (2) possano generare la stessa serie di numeri triangolari!
Il problema delle strette di mano fa parte di una classe di problemi di calcolo combinatorio di notevole importanza: ad esempio, trovare il numero di connessioni necessarie per formare un network tra n computer è analogo al caso delle strette di mano tra n persone e quindi la soluzione è data anch'essa dall'equazione (2). Per esempio, se voglio formare un network di n=12 computer, l'equazione (2) mi dice che ho bisogno di 66 connessioni, e 66 è il (12-1)-esimo = undicesimo numero triangolare, vedi la Tabella 1.
Il calcolo combinatorio è di basilare importanza in molti calcoli statistici per applicazioni pratiche, perché permette di conoscere quante combinazioni di un certo numero di elementi si possono ottenere all'interno di un insieme di cui si conosce il numero totale di elementi. Trovare quante combinazioni P di M elementi su un totale di N elementi vuol dire, ad esempio, trovare quante diverse bandiere di 3 colori (M=3) posso realizzare avendo a disposizione 10 colori (N=10). Il calcolo combinatorio ci dice che il numero P delle possibili combinazioni di M elementi in un insieme totale di N elementi (quindi N è maggiore di M), è dato dalla seguente equazione:

$$P = \frac{N!}{M!(N-M)!} \qquad (3)$$

dove N! (che si legge "N fattoriale") è dato dal prodotto di N per tutti i numeri che vanno da 1 fino ad N-1, ovvero:
N! = N×(N-1)×(N-2)×(N-3)×….×2×1
Ad esempio, se nell'equazione (3) poniamo M=2, otteniamo *P* = N×(N-1)/2, identica all'equazione (2) che permette di calcolare il numero delle strette di mano: infatti, in questo caso *P* è il numero di possibili combinazioni di M=2 persone che si stringono la mano all'interno di un gruppo di N persone. Nel caso delle bandiere di 3 colori su 10 colori a disposizione, l'equazione (3) fornisce il numero di combinazioni P=120. Infatti,

$$P = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\times 7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120.$$

A parte il calcolo delle strette di mano, delle connessioni ai computer, delle bandiere colorate diverse tra loro, a cosa serve calcolare il numero di combinazioni possibili? A risparmiare denaro evitando di giocare d'azzardo! Se, ad esempio, un lontano parente ci appare in sogno suggerendo 5 numeri da giocare al lotto, è probabile che il

giorno dopo, di buon mattino, ci recheremo alla ricevitoria più vicina per giocare i 5 numeri convinti di avere molte probabilità di brindare alla vittoria. Ma qual è la probabilità oggettiva di indovinare i 5 numeri, ovvero di fare cinquina?
Ecco che ci viene in soccorso l'equazione (3). Se scommettiamo sull'estrazione di 5 numeri sui 90 possibili, la probabilità di fare cinquina è pari ad 1 combinazione (quella scelta da noi) su tutte le combinazioni di M=5 numeri presi da un insieme di N=90 numeri. Sostituendo nell'equazione (3) M=5 e N=90 otteniamo il numero P di possibili cinquine tra un gruppo di 90 numeri:

$$P = \frac{90!}{5!(90-5)!} = \frac{90!}{5! \times 85!} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 43.949.268.$$

Quindi, le possibili cinquine sono poco meno di 44 milioni, e solo una di queste corrisponde alla nostra cinquina!
E la probabilità di fare 6 al Superenalotto giocando 6 numeri? La formula (3) ci dice che abbiamo una sola probabilità su più di 622 milioni di combinazioni, e questo vuol dire che se giochiamo due combinazioni alla volta, in ciascuna delle tre estrazioni settimanali, dobbiamo aspettare circa 2 milioni di anni prima di avere la quasi certezza di vincere... per non parlare di altri effetti collaterali, vedi la Figura 3.
Il calcolo della probabilità di fare ambo o terno è un po' più complicato, ma si parte sempre dalla formula (3), che è alla base del calcolo combinatorio.
Chiudiamo la parentesi combinatoria, per tornare alle curiose proprietà dei numeri triangolari. I numeri sono belli per questo: sono tanti, anzi infiniti, e le loro caratteristiche sorprendenti. Un esempio? "Tutti i numeri perfetti sono anche triangolari."
E che cos'è un numero perfetto – chiederete voi – un numero che merita l'epiteto di "perfetto" deve avere proprietà straordinarie, quindi ce ne dovrebbero essere pochi... Giudicate voi se l'epiteto è meritato. Per definizione, "Un numero naturale si dice perfetto quando è uguale alla somma dei suoi divisori propri." Ad esempio, 6 si può dividere per 1, per 2, e per 3. Al tempo stesso, 6 = 1+2+3. Quindi 6 è un numero perfetto. Il numero perfetto successivo è 28: infatti 28 = 1+2+4+7+14 e gli addendi sono i divisori di 28. Notate che sia 6, sia 28 sono numeri triangolari, vedi la Tabella 1. Ma non è facile trovare dei numeri che abbiano questa peculiare caratteristica, e di conseguenza i numeri perfetti sono meno "frequenti" di quelli triangolari. Infatti, dopo 6 e 28 il terzo numero perfetto è 496 (che è anche il trentunesimo numero triangolare), il quarto è 8.158, il quinto 33.550.336, il sesto numero perfetto è un numero superiore a otto miliardi e mezzo... Insomma, sembra evidente che i numeri perfetti siano assai meno numerosi (diciamo che sono un piccolo sottoinsieme) dei numeri triangolari.
Ma è corretto affermare che i numeri perfetti siano meno numerosi?
Cerchiamo di ragionare: sappiamo che i numeri naturali sono infiniti, perché per qualunque numero N, comunque grande lo possiamo immaginare, ci sarà sempre N+1. Poiché ciascun numero naturale può essere associato ad un numero triangolare, vedi la Tabella 1 e l'equazione (1), anche i numeri triangolari sono infiniti. Dato che i numeri triangolari sono infiniti e tutti i numeri perfetti sono triangolari, possiamo affermare che anche i numeri perfetti sono infiniti? Forse si, ma sinora nessuno lo ha ancora dimostrato in modo rigoroso: al giorno d'oggi, calcolatori particolarmente potenti hanno permesso di trovare solo i primi 42 numeri perfetti [6]. Gli altri, se esistono, sono semplicemente troppo grandi per essere calcolati.
Ipotizziamo per un momento che anche i numeri perfetti siano infiniti: come potremmo affermare che una quantità infinita di numeri sia minore di un'altra quantità infinita?

FIGURA 3 Un cartello fotografato in una ricevitoria in provincia di Messina, in cui la saggezza popolare riassume le conseguenze e gli effetti collaterali di una vincita al superenalotto. Tratto da https://www.flickr.com/photos/43698630@N00/1378380572/

Si può dire che i numeri perfetti sono "un po' meno infiniti" dei numeri triangolari, i quali a loro volta sono "un po' meno infiniti" dei numeri naturali? In altri termini, gli infiniti sono tutti uguali o ce ne sono alcuni che sono più infiniti di altri?

Chissà… Diversi matematici di grande valore, da Georg Cantor (1874) a Kurt Gödel (1940) a Paul Cohen (1963), hanno ragionato a lungo su questi "diversi ordini di infinità", o, più propriamente, sulla "diversa cardinalità" degli insiemi infiniti. La grande bellezza dei numeri, oltre che di eleganza e di estetica, si nutre anche di problemi al limite del pensiero umano [7] e quando si parla di infinito, tutto può accadere! ●

Paolo Di Lazzaro, Daniele Murra
ENEA

note

[1] Vedi, ad esempio, R. Tazzioli: Gauss Carl Friedrich: principe dei matematici e scienziato poliedrico, Collana I grandi della scienza, monografia n. 28, supplemento a Le Scienze vol. 410 (2002).

[2] Il primo resoconto di questo aneddoto fu scritto da Sartorius nel 1856, un anno dopo la morte di Gauss. Sartorius scrive che il compito consisteva nel calcolo della somma di una serie, senza specificare i limiti della serie né la sua ragione (differenza tra i termini successivi). Il primo a scrivere che si trattava della serie da 1 a 100 di ragione 1 fu Bieberbach nel 1938. Un'interessante indagine sulle diverse versioni dell'aneddoto si può trovare in B. Hayes: *The Gauss's day of reckoning,* American Scientist, vol. 94, 200 (2006).http://www.americanscientist.org/issues/pub/gausss-day-of-reckoning/1

[3] Nicomaco di Gerasa (60–120 d.C.) nell'opera Αριτημετικε εισαγογε (Introduzione all'aritmetica) cap. XII, afferma che i Pitagorici scoprirono alcune semplici proprietà dei numeri figurativi mediante l'aritmogeometria. L'aritmogeometria consiste nel rappresentare i numeri naturali con configurazioni geometriche di punti (numeri figurati o poligonali). Questa opera è stata tradotta in inglese dalla casa editrice McMillan, vedi Nicomaco di Gerasa, *Introduction to arithmetic* (NY McMillan Co. 1926).

[4] Nell'appunto di Gauss, sintetico e criptico ma allo stesso tempo inequivocabile, era scritto: EYPHKA! Num = $\Delta+\Delta+\Delta$ (10.7.1796). Si tratta "solo" di un enunciato, ma Gauss pubblicò la dimostrazione 5 anni dopo, nell'ambito di uno studio sulle forme quadratiche ternarie, vedi: C.F. Gauss: Disquisitiones Arithmeticae, cap. V, art. 293 (Lipsiae, 1801). In sintesi, Gauss dimostrò che per ogni numero n intero positivo, 8n+3 è uguale alla somma di tre numeri dispari elevati al quadrato. Dalla dimostrazione di Gauss segue che: $8n+3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$, dove a, b, e c sono tre numeri interi positivi qualunque, e ovviamente (2a+1), (2b+1), e (2c+1) sono sempre dispari. Sviluppando i quadrati nell'equazione (4) e semplificando, otteniamo: $n = a(a+1)/2 + b(b+1)/2 + c(c+1)/2$. Notiamo che ciascuno degli addendi è analogo alla formula di Gauss (1), quindi è un numero triangolare. Ne segue che qualunque numero n positivo intero può essere scritto come somma di tre numeri triangolari. Per un'accurata analisi storica che evidenzia anche i contributi di Fermat e di Legendre, suggeriamo L.E. Dickson: *History of the Theory of Numbers, Volume II: Diophantine Analysis* (Dover Publications, 2005) p. iv della prefazione e seguenti.

[5] A. Cauchy: *Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygones* vol. VI (II Série) dell'opera Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, (Paris: Gauthier-Villars) pp. 320-353 (1905).

[6] Vedi, ad esempio, C. Baudino: *I numeri perfetti* http://webmath2.unito.it/paginepersonali/romagnoli/perfetti.pdf

[7] Per una elementare e divertente introduzione ad alcuni aspetti del concetto di infinito e di infinitesimo in matematica, vedi ad esempio H.M. Enzensbarger: *Il mago dei numeri* (Einaudi, Collana Ragazzi, 2002).